V EJEMPLO 2 Encuentre una solución de la ecuación diferencial $y' = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$ que satisface la condición inicial $y(0) = 2$.

SOLUCIÓN Al sustituir los valores $t = 0$ y $y = 2$ en la fórmula

$$y = \frac{1 + ce^t}{1 - ce^t}$$

del ejemplo 1, se obtiene

$$2 = \frac{1 + ce^0}{1 - ce^0} = \frac{1 + c}{1 - c}$$

Si esta ecuación se resuelve para c, se obtiene $2 - 2c = 1 + c$, que da $c = \frac{1}{3}$. Por tanto, la solución del problema con valores iniciales es

$$y = \frac{1 + \frac{1}{3}e^t}{1 - \frac{1}{3}e^t} = \frac{3 + e^t}{3 - e^t}$$

9.1 Ejercicios

1. Demuestre que $y = \frac{2}{3}e^x + e^{-2x}$ es una solución de la ecuación diferencial $y' + 2y = 2e^x$.

2. Compruebe que $y = -t\cos t - t$ es una solución del problema con valores iniciales

$$t\frac{dy}{dt} = y + t^2 \operatorname{sen} t \qquad y(\pi) = 0$$

3. a) ¿Para qué valores de r la función $y = e^{rx}$ satisface la ecuación diferencial $2y'' + y' - y = 0$?
   b) Si r_1 y r_2 son los valores de r que encontró en el inciso a), demuestre que todo integrante de la familia de funciones $y = ae^{r_1x} + be^{r_2x}$ también es una solución.

4. a) ¿Para qué valores de k la función $y = \cos kt$ satisface la ecuación diferencial $4y'' = -25y$?
   b) Para esos valores de k, verifique que cualquier integrante de la familia de las funciones $y = A \operatorname{sen} kt + B\cos kt$ también es una solución.

5. ¿Cuáles de las siguientes funciones son soluciones de la ecuación diferencial $y'' + y = \operatorname{sen} x$?
   a) $y = \operatorname{sen} x$ b) $y = \cos x$
   c) $y = \frac{1}{2}x \operatorname{sen} x$ d) $y = -\frac{1}{2}x\cos x$

6. a) Demuestre que cualquier integrante de la familia de funciones $y = (\ln x + C)/x$ es una solución de la ecuación diferencial $x^2y' + xy = 1$.
   b) Ilustre el inciso a) graficando diferentes miembros de la familia de soluciones en una pantalla común.
   c) Encuentre una solución de la ecuación diferencial que satisface la condición inicial $y(1) = 2$.
   d) Determine una solución de la ecuación diferencial que satisface la condición inicial $y(2) = 1$.

7. a) ¿Qué puede decir acerca de una solución de la ecuación $y' = -y^2$ con sólo observar la ecuación diferencial?
   b) Compruebe que todos los miembros de la familia $y = 1/(x + C)$ son soluciones de la ecuación del inciso a).
   c) ¿Puede pensar en una solución de la ecuación diferencial $y' = -y^2$ que no sea un miembro de la familia del inciso b)?
   d) Encuentre una solución del problema con valores iniciales

$$y' = -y^2 \qquad y(0) = 0.5$$

8. a) ¿Qué se puede decir acerca de la gráfica de una solución de la ecuación $y' = xy^3$ cuando x es cercana a 0? ¿Qué pasa si x es grande?
   b) Compruebe que todos los miembros de la familia $y = (c - x^2)^{-1/2}$ son soluciones de la ecuación diferencial $y' = xy^3$.
   c) Grafique varios miembros de la familia de soluciones en una pantalla común. ¿Las gráficas confirman lo que predijo en el inciso a)?
   d) Encuentre una solución del problema con valores iniciales.

$$y' = xy^3 \qquad y(0) = 2$$

9. Una población se modela mediante una ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = 1.2P\left(1 - \frac{P}{4200}\right)$$

   a) ¿Para qué valores de P la población es creciente?
   b) ¿Para qué valores de P la población es decreciente?
   c) ¿Cuáles son las soluciones de equilibrio?

10. Una función $y(t)$ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = y^4 - 6y^3 + 5y^2$$

   a) ¿Cuáles son las soluciones constantes de la ecuación?

Se requiere calculadora graficadora o computadora **1.** Tareas sugeridas disponibles en stewartcalculus.com